# 报告摘要

## 问题简介

武器目标分配问题是一个军事领域中经典的数学优化问题，最初由Manne(1958)[1] 引入，最开始的目标为为来袭导弹分配可用的拦截弹，以最小化导弹摧毁受保护物资的概率。随着对问题研究的深入与算力的进步，武器目标分配逐渐发展出很多不同的细分领域，在众多的划分标准中，一个重要的划分标准为考虑一阶段问题还是多阶段问题，即将问题分为了静态WTA问题（SWTA问题）与动态WTA问题（DWTA问题）。静态WTA问题中不考虑时间，仅考虑针对一次导弹来袭所做的拦截。而动态WTA问题则主要考虑拦截 - 观察 - 拦截的模式，即每次打击过后观察打击的结果并安排下一次打击。Lloyd和Witsenhausen(1986)[2] 证明了即使是较为简单的静态WTA仍然是NP完全的，因此在之前的研究中，大多数研究者的研究课题是寻找合适的智能方法，通过启发式算法在一个较短的时间内寻找接近最优解的方法。但启发式算法并不能在理论上保证最终结果的最优性，在之前的研究中，使用整数规划方法，求解问题精确解的研究内容较少，求解规模较小，直到近几年才有相对有效的算法出现，本次研究即希望立足于作战体系中武器目标分配的的精确求解算法研究，根据问题的特殊结构，分析问题的数学理论性质并设计高效的精确算法，为指挥员在兵器系统种类和数量庞大、突击时间短、对抗强度大的复杂战场形势下及时做出最优决策提供技术支持。

## 报告结构介绍

本次报告的以下内容将分为如下几个部分。在第二部分中，将详细介绍问题的背景，包括WTA问题的基本历史发展，在使用整数规划方法求解WTA精确解过程中可能用到的数学工具，以及对问题困难性的补充。在第三部分中，将详细介绍截至目前的研究中，针对WTA问题所建立的各种数学模型，并分析其适用性范围并讨论是否适用于本项目。在第四部分中，将介绍用于求解第三部分的诸多数学模型中与本项目相关程度较大的模型的求解算法，并介绍这些求解算法所能达到的求解速度与求解规模。在第五部分中，将介绍我们团队目前针对该问题的数学建模与求解算法的初步构想，并分析其合理性，同时给出未来的研究计划。在第六部分中将对报告进行总结。

# 背景 / 问题的重要性

## 问题的数学背景

### 优化问题与整数规划问题相关的基本概念

数学规划是数学中的一个分支，它主要研究的目标在给定的可行域中寻找可以最小化或最大化某一函数的最优解。其最基本的模型形式就是假设存在一个函数，我们希望能够在给定的定义域A中找到满足函数值最小或者最大的点。在数学规划的语言中，上述目标函数的自变量被称为决策变量。

针对本次研究课题武器目标分配问题，由于要做的决策是某个特定的武器是否要打击某个特定的目标，因此决策变量通常设置为0-1变量，即如果采用某个特定的武器打击某个特定的目标，即将变量设置为1，否则就设置为0，或者设置变量为某种武器用于打击给定目标的个数，因此整体上属于数学规划中的整数规划问题分支。

整数规划问题的定义即为部分决策变量或全部决策变量为限制为整数的有约束的数学规划问题。根据计算复杂度理论，普通的整数规划上是一个非常困难的问题。对于整数规划问题的一般形式，即使假设所有的变量为二值变量（即x的取值只能是0或者1），并且只需要满足限制条件而没有目标函数的问题（即不要求对问题进行最优化，而仅需要找到一个满足要求的解），依然是一个NP完全问题（即按照目前的观点，无法找到一个理论上满足多项式时间的算法来求解得到问题的精确解）。因此对于整数规划问题，需要针对具体的结构来设计相应的算法，以期其在实际表现中达到一个比较块的求解速度。

因此本次项目中，主要任务包括对于问题的数学建模与设计求解算法：将现实问题转化为一个整数规划模型，再依据此整数规划模型的特殊结构设计适合的求解算法来对问题进行求解。建模部分需要与项目主承研部分进行充分沟通，以保证数学模型的建立能够满足实际应用的需求，在初步建立了一个模型后，研究重心将放在针对模型和展开整数规划算法的设计，以期尽可能扩大计算规模并增加计算速度，以保证求解结果能够尽可能地辅助评价其他启发式算法结果。

### 分支定界方法

分支定界（英语：Branch and bound，BB）是用于离散优化、组合优化以及数学优化问题的算法设计范式。分支定界算法可以视为一种对可行解进行穷举的算法，但是和普通穷举法所不同的是，分支定界算法在对某一分支进行检索之前会预先计算出该分支的上界或下界，如果界限无法比目前的最优可行解更好，那么该分支就会被舍弃，通过降低搜索空间的规模节约了大量的搜索时间。分支定界算法非常依赖过程中计算得到的合适的上界与下界，如果无法找到合适的分支上下界，该算法将会退化为穷举法，因此在采用分支定界框架对问题进行求解的时候，要点之一就是要想办法改进对于上下界的估计，通过较好的上下界降低搜索空间的大小，以减少算法求解所需时间。

在分支定界的算法框架中，有几个重要的概念：分支、上界（可行解）、下界（线性规划松弛解）、上下界之间的gap以及剪枝。其中分支的概念是，当原来的问题没有有效求解算法时，给原来的问题增加一个限制来进行分类讨论。举例而言，如果存在某个决策变量为0-1变量，则可以通过分支将原问题分类为固定该变量为0与固定该变量为1两种情况，从而将一个复杂的问题转化为两个相对简单的问题。上界则是当计算目的为将目标函数值最小化时，选择任何一个可行域中的可行解，就可以保证该解比最优解的目标函数值更大，而可行解经常是在当分支进行的过程中，增加了那些分支限制后，再松弛问题为线性规划问题求得的解，即通过增加更多的限制来求解得到原问题的一个可行解（如上一章所说，即使是求解得到一个可行解依然不是一件很容易的事情），通过计算该可行解对应的目标函数值就可以得到该分支的上界。而下界则是对问题进行松弛，即扩大问题的可行域，从而使得求解得到的新问题的解不大于原问题的解，从而新问题得到的松弛解即可给出原问题的一个下界。根据上界和下界的定义，由于能够保证目标函数最有值一定在上界和下界之间，因此通过计算上界与下界的偏差，即可得到最优函数值与已求得的可行解之间的偏差不大于上界与下界的偏差。这个偏差与上界的比例即被称为gap，gap的概念保证了解的最优性，同时也可以利用gap的概念给出一个效果还可以的解。最后一个重要的概念是剪枝，即确保在某个分支中一定不会包含最优解，常用的情况包括确定了该分支的下界大于上界，该分支无解，或者确定该分支所能达到的最优情况已经比其他分支的某个情况更差。分支定界算法框架既保证了求解问题的过程不需要花费过多的时间，也解释了为什么整数规划方法能够在该时间内给一个NP完全问题提供一个精确解。

举例而言，在WTA问题讨论的过程中，一次分支可以视为对问题进行一次固定，将全部问题划分为1号武器攻击1号目标与1号武器不攻击1号目标两种情况。结合具体问题的分析，通过一定的数学推导，可能得到1号武器攻击1号目标一定会比某个已知的打击方案花费更多，此时即可不考虑包含1号武器攻击1号目标的全部方案，这个过程即为上述提到的剪枝步骤。整个算法的设计过程即针对具体问题设计相对应的分支与剪枝方案，并辅助其他的整数规划求解技巧，直到问题的精确解求解速度能够达到要求。

## WTA问题的发展

### 武器目标分配（WTA）问题的历史发展

从1958年首次在武器目标分配被首次提出以来，研究者曾经针对该问题提出过很多不同的数学模型，其关注的重点包括：武器系统如何进行分类、目标是否有优先级、如何对于伤害的进行、采用进攻型还是防御型的系统，是否将时间纳入考虑范围等多种不同的建模要素。其中一个重要的划分标准为是否将时间纳入考虑范围，根据考虑的阶段数，将问题分为了静态WTA问题（SWTA问题）与动态WTA问题（DWTA问题）。静态WTA问题中不考虑不同的时间阶段，仅考虑针对一次导弹来袭所做的拦截。而动态WTA问题则主要考虑拦截 - 观察 - 拦截的模式，即每次打击过后观察打击的结果并安排下一次打击。针对具体的详细模型，将在第三章中进行展开，在本小节中，将对WTA问题的历史沿革做一个简要的概述。

自 Manne (1958)[1] 的工作以来，WTA问题逐步发展了数学模型与求解算法。在比较早的时期，由于计算机解决大型非线性问题的能力有限 (Day, 1966)[3]，当时的研究者将研究种地放在了形式较为简单的SWTA 问题 (denBroeder et al., 1959)[4] 并结合当时的计算能力开发了二相对应的比较简单的求解方法(Lemus & David，1963)[5]，(Day，1966)[3]。 Eckler & Burr (1972)[6] 提出并讨论了采用动态规划的方式求解 SWTA 的可能性，但未能较好地得到解决此类问题的算法。随着计算能力的提高，计算机解决更加复杂的问题的能力也在提高。Burr et al. (1985)[7] 建模并解决了最早的 DWTA 问题之一，与此同时Chang (1987)[8] , Soland (1987)[9] 和 Hosein(1989)[10] 等人也对求解DWTA问题提供了一些方法。同时，用新方法解决了具有较少假设的 SWTA 模型（包括Kwon et al., (1999)[11]；Metler et al., (1990)[12]；Wacholder, (1989)[13]），较少的假设使得问题与现实的情况更加贴合，但是同样增加了问题的难度。这种对于早期算法进行修补的过程一直持续到 2000年。在20世纪00年代，模型和求解算法得到了进一步发展：一个发展方向是在模型中引入更多参数，使得模型能够更好地反应现实情况（即 Shang et al. (2007)[14] 和Karasakal (2008)[15]）；另一个发展方向则是保证模型能够更加快速地得到最优解或者最优解的近似解（即 Malcolm, (2004)[16]，Ahuja et al. (2007)[17]，以及 Ahner & Parson (2015)[18]）。随着新的模型的建立，后续研究者基于这些模型开发了更新的算法（即 Bertsekas et al., (2000)[19]；Kline et al., (2017)[20]；Wu et al., (2008)[21] ）或将原有的方法进行了效果显著的改进（即 Ahuja et al., (2007)[17]；Lee et al., (2002)[22]；Su et al., (2008)[23]；Xin et al., (2010)[24]）。

随着计算机算力的不断增长，WTA现有的研究方向除了在已经存在的现有模型上改进求解方法之外，还提出了关于目标飞行路径的时间依赖性的动态模型 （Khosla, (2001)[25]; Leboucher et al., (2013)[26]），但与现有模型相比受到的关注较少，且这些模型中解决方案技术的改进尚未出现。

在WTA问题发展的过程中，关于问题的困难程度也曾经被多人指出。Khosla (2001)[25] 指出，“尽管采用了两步法，但每个优化问题仍然即使对于数量不多的威胁、武器系统和时间点，也有巨大的搜索空间。”改进两步法的方法尚未出现。同样，Leboucher at el. (2013) [26]评论了问题的指数增长并提出了一种两步解决技术，并补充说另一个问题是“如何评估一个解的质量”。WTA 的未来将需要解决前面提到的以调度为中心的 DWTA 的困难与能够利用问题的特殊结构的技术。此外，存在许多问题中本应该被引入的参数，由于它们会带来增加的计算复杂性而被删除，随着计算能力的增加，这些参数可以使用新的理论模型重新引入，以保证模型更加贴合实际情况。

## 整数规划求解方案对WTA问题求解的重要性

### 应用整数规划方法求解WTA问题的目的与意义

现代战争强度大，空袭和防空兵器种类多，如无人机、战术歼击机、强击机、轰炸机、各种直升机、各种巡航导弹、各型战役-战术导弹、远程雷达探测系统、各型防空反导系统等。为帮助指挥员管理如此种类繁多、数量庞大的兵器并及时根据战场形势作出最优决策，需要充分利用现代科学技术如运筹优化的理论与方法、网络技术和云计算技术、智能技术等，将目前已有的各种武器系统形成一个整体，力求整个作战体系在任何形势或环境条件下，都能及时有效地杀伤各种类型的目标，完成作战目标。

运筹优化旨在给定相关条件限制下，分配相关资源并选取某种执行方案使目标达到全局最优。在作战体系中，资源配置通常带有离散的属性（如是否从给定的一个点到另一个点执行某种任务、是否使用某类武器打击某个目标、执行方案是否满足某个场景等），因而，我们面临的运筹优化问题通常带有整数变量，也就是整数规划问题。快速有效地求解整数规划问题，得到问题的全局最优解，能为指挥员在兵器系统种类和数量庞大、突击时间短、对抗强度大的复杂战场形势下及时做出最优决策提供技术支持，增强我国的国防实力。然而，在理论上，整数规划具有NP困难性，这也给算法设计和分析带来了极大的挑战。本项目旨在充分利用作战体系中的整数规划问题的特殊结构，分析问题的数学理论性质并设计快速有效的求解算法，得到问题的全局最优解，为根据战况及时动态调整并使整个作战体系效能达到实时全局最优提供保障，为指挥员及时有效判明战场形势并做出最优决策提供技术支持。

### 精确算法与启发式算法的对比

精确算法与启发式算法（比如神经网络、粒子群算法等）的一个重要区别在于，启发式算法注重求解速度，但是对于求解得到的结论却难以保证最优性，而采用精确算法的优势在于对于整个求解的过程都有准确的把握，虽然无法保证在任何情况都能够比较快的求解得到最终的解，但能够保证解的有效性，同时在求解的过程中也会依据算法的设计来给出一些偏差不大的解。

目前对武器目标分配中的整数规划问题有不少研究，但主要还是采用一些智能优化启发式方法（特别是国内学者的研究），如遗传算法（Genetic Algorithm）、模拟退火算法（Simulated Annealing）、蚁群算法（Ant Colony）、粒子群算法（Particle Swarm Optimization）等，这些方法虽然对一些较大规模的问题取得了较好的计算结果，但在理论上并不能保证解的质量，也不能达到系统对计算结果有效性的要求；对于如何采用精确的方法求解，并在相对比较短的时间内给出最优方案，使实时地达到整个体系作战效能全局最优这一问题尚未见到系统的研究。因此有必要根据问题的特殊结构，分析问题的数学理论性质并设计高效的精确算法（如分支定界方法、割平面方法、预处理方法等），给出全局最优解，为指挥员在兵器系统种类和数量庞大、判断时间短的复杂战场形势下及时做出最优决策提供技术支持。

# 已有结果（建模部分）

## 基本发展情况与符号

WTA 有许多不同的建模方式。静态武器目标分配（SWTA）的基本形式是由Manne(1958)[1] 提出的，但其形式为非线性形式。由于非线性规划在当时难以被计算，早期文献试图转换原问题为线性形式。 随着计算能力的提高，出现了更适合的优化工具，比如凸优化或者全局优化的算法，但对于该问题的数学建模基本上仍然是围绕最开始的形式进行变形，使之能够更加符合实际。而Burr (1985)[7] 引入了 DWTA，它在模型中考虑了多阶段问题。与SWTA 类似，原始 DWTA 的变体贯穿整个研究历程。

在对问题进行数学建模的过程中，如何对武器系统、打击目标、作战目的、是否考虑多阶段等关键要素进行刻画决定了最终数学模型的形式。对于武器系统，建模的方式包括要求武器各不相同还是存在几类武器、是否所有的武器都能打到全部的目标、打击结果是固定的还是概率的等问题。对于目标。包括一个目标是否仅能被一个武器攻击、不同的是否有权重和优先级、目标被攻击后受损是部分受损还是完全消灭。针对作战目的，目前主要分为两种情况：防御型与进攻性。其差别在于目的是防止对方摧毁我方目标还是尽可能摧毁敌方目标。而动态WTA问题则是考虑到时间因素，是否要将拦截过程分为多阶段，要针对具体的战场环境，根据目前的摧毁情况来制定下一步的策略。

在最新的科研进展中，还考虑了更多的要素，比如是否考虑目标飞行的弹道，是否将传感器与火力作为不同的要素进行考虑等。这些要素的引入都能够使得目标更加接近真实的战场环境，但同样也会让问题的复杂度进一步提升。

为了更好地展示模型，我们首先给出数学模型中我们将要的记号，不同的模型中使用了以下记号中的一部分：

* pij : 武器i摧毁目标j的概率。
* qij : 武器i未能摧毁目标j的概率。
* Vj : 目标j的摧毁价值。
* xij : 分配给目标j的种类为i的武器个数，如果限制每种武器仅有一个，则该变量为0-1变量。
* n : 目标的个数。
* m : 武器种类的个数。如果限制每种武器只有一个，则该变量指示武器的个数。
* wi : 第i类武器的个数
* cij : 将武器i分配给目标j的花费
* sj : 能够分配给目标j的最大武器数目
* t : 时间阶段（仅在DWTA问题中有效）

## 对于SWTA问题的建模

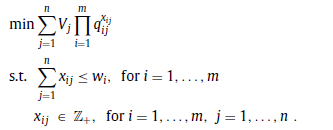
### 模型一

该模型是Manne (1958)[1] 定义的WTA问题的原始数学模型，这也是以下多种静态WTA模型的基础。建模考虑了作为防守者，共有i = 1, … , m个武器，每种武器有wi个，且使用这些武器攻击j = 1, … , n个目标。且假设每种武器类型i摧毁目标j概率为pij，每个目标 j 都有一个被摧毁的价值Vj。决策变量xij表示分配给目标 j 的类型 i 的武器数量，依此给出了WTA问题的原始模型：

图表

中度可信度描述已自动生成

该模型经常将(1 – pij) 改写为 qij ，从而得到模型：



该形式中的中目标函数希望最小化加权的摧毁概率，该形式是凸的。两个约束分别要求武器分配个数为整数，以及对每个目标的分配不能超过现有的武器数量。

### 模型二与模型三

模型二与模型三的主要思路是通过对模型一进行简化或者进行一定程度的近似，来保证问题是一个线性规划。这两个模型都是比较早期的模型，当时的计算能力与算法框架难以解决较复杂的非线性规划的问题，因此都将问题转化为了容易解决的模型。这两个模型因为其近似程度较大，导致问题与现实模型偏离太多，因此在此处不进行过于详细的展开。

模型二的主要思路是假设所有武器对目标 j 的杀伤概率相同，即可得到：

图片包含 文本

描述已自动生成

模型三的主要思路是首先将问题的目标函数转化为线性函数，从而其约束就被转化为了比较复杂的形式，之后对非线性约束进行对数变换并进行下取整，以生成线性近似，依此得到了一个线性规划问题：

文本, 信件

描述已自动生成

虽然该问题计算起来比较容易，但是由于采用了近似的方法，因此无法得到原问题的精确解。

### 模型四

模型四的思路是利用对数变换对原问题进行一个等价的转换，其假设dij = - ln (qij)，即可得到：

文本, 信件

描述已自动生成

通过这种转变，Ahuja (2007)[17] 将目标函数转换为了多个分离凸函数相加。他们利用这种转换将 SWTA 建模为网络流问题。虽然在数学本质上，该形式与模型一完全等价，但是它的表述方式却更加适合使用求解器进行求解。根据Kline et al.(2017)[20] 得到得数值实验结果，采用 BARON 等商业全局优化求解器时，模型四比模型一更可靠，后者的求解最优解的错误率约为 21%。

### 模型五

该模型得思路是限制每种武器仅有一个，因此问题就会被转化为一个0-1规划。其对模型一的改进主要体现在此时目标函数中的决策变量可以从指数项变为多项式项，即

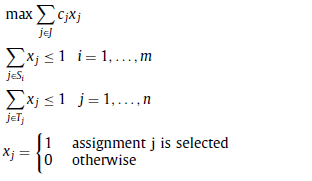


虽然现实中的问题通常每种武器都有不止一种，但可以通过假设所有的武器各不相同来将问题转化为该模型。举例而言，按照第一个模型中，假设有4种武器，每种武器包含4种，则可以直接将16种武器视为完全不同的武器，即可满足该模型种的要求。该转换增加了问题的决策变量的数量，但是针对0-1变量却有更加有效的求解技术。

### 模型六与模型七

这两种模型同样都是对问题进行了进一步的简化假设。

在模型六中，Rosenberger et al.(2005)[27] 提出了一个简化的公式。他将 SWTA 建模为背包问题，他们定义了一个正的成本参数cj表示将武器分配给目标j时产生的花费，从而得到了以下的背包问题模型：



在这个模型种假设了不能将两种武器分配给同一个目标，这导致了模型虽然在求解时可以利用背包问题的求解方法，但是其泛化能力却比较低。

而在模型七中，Malcolm (2004) 提出了一个具有相同0-1决策变量的形式，其中目标在结构上与模型五相似，但是依然要求每个目标仅能分配给一个武器，且限制武器和目标的个数相同，从而得到了以下的模型：

手表的卡通人物

中度可信度描述已自动生成

图形用户界面, 文本

描述已自动生成

由于对于问题模型的诸多限制，其与真实情况相差仍然较远，因此在本项目中也不会针对该模型进行详细的讨论。

### 进攻型模型

除了上述模型之外，还有一类模型考虑了目标对于我方设施的摧毁。即假设每一个目标都会针对我方的一个设施，如果没有成功消灭目标，则它以某种概率对我方设施造成毁伤，此时将问题的目标函数转换为了最小化对我方设施损伤的程度。由于这种模型与我们本项目中的内容结合程度较低，且目前没有什么较好的求解方式，因此在此次报告中并不针对该问题进行详细讨论。

## 对于DWTA问题的建模

DWTA 包含两种主要的模型，这两种模型的数学形式相差较大。

第一个模型是 shoot-look-shoot 模型，它对于每次打击结果都可以进行观察，因此在打击的过程中目标是否中存在都是确定的。在这种模型中，假设问题共有两阶段，武器在第一阶段中将武器分配给目标，之后随着打击结束对问题进行一次观察。针对第一次打击带来的结果，将剩余的武器分配给幸存的目标。

第二个模型被称为两阶段模型，或者更一般地说多阶段模型，它与 shoot-look-shoot 的不同之处在于它不允许在打击后观察，且每个目标仅被考虑一次，若在某一阶段没被摧毁，后续将不再有摧毁该目标的机会。也就是说，在 shoot-look-shoot 问题中，作战目的是对给定数量的目标进行反复攻击，直到所有目标都被摧毁或达到迭代次数的限制。 而在2阶段问题中，第一次会出现的目标是给定的，但是在第二阶段，有可能会重新出现新的目标，且目标的数量和类型仅仅能够给出一个概率分布而不是确定性的。在已知多阶段的目标的概率分布的前提下，希望能够给出对目标毁伤的数学期望最高的方案。

可以看出，动态WTA问题的复杂程度明显高于静态WTA，但是却能够更好地结合实际情况。在更加复杂的模型中，也存在将两种动态模型结合在一起的情况，但是目前针对此问题尚没有比较好的精确求解方法。

由于动态WTA问题的算法复杂程度较高，因此目前针对DWTA的精确算法往往都对模型进行了非常严格的限制，比如Eckler和Burr (1972)[6] 假设所有武器具有相同的杀伤概率并且所有目标具有相同的价值，这导致该问题的数学模型过于简略，从而对实际应用场景不高，因此在此次调研报告中将主要讨论针对静态WTA的问题。对于在实际应用场景中具有多阶段的情况，在每阶段内使用SWTA的求解方法，以保证每阶段都可以得到当阶段的最优解。

# 已有结果（算法部分）

如之前所述，对于数学模型的求解算法包括了精确算法与启发式算法两部分，在2.3节中已经指出使用精确算法的意义与必要性，本次调研报告的关于算法部分的重点也将注重于精确算法相关的调研。

## 精确算法

### 针对SWTA的早期精确算法

在文献调研的过程中，针对 WTA 的精确算法解决方案较少，其本质原因依然是之前指出的该问题为 NP 完全问题（Lloyd & Witsenhausen，(1986)[2]）。对于SWTA，将 m 件武器分配给 n 个目标的可能排列数为nm，假设必须分配所有武器，随着武器和目标数量的增加，它呈指数增长，搜索所有可能的解决方案对于计算提出了较大的挑战。 因为 DWTA 包括射击-观察-射击或多阶段（或两者）框架，它进一步增加了排列的数量，从而精确求解也会变得更加困难。在早期（2010年之前）实施精确求解技术的文献通常采用以下两类方法之一：计算规模较小的问题或者提出一些额外的假设以降低问题的复杂度。

denBroeder (1959)[4] 在他们的最大边际回报 (MMR) 算法中展示了第一个精确求解的技术，但是如之前所说，做了较强的假设：假设任何武器击中目标 j 的概率相同，他们表明可以通过分配，他们的算法中采用了逐步分配武器的贪婪方法，直到分配了所有武器。Hosein(1989)[10] 指出，当所有武器对所有目标的杀伤概率相同时，最优解为通过将武器平均分配给各个目标。Malcolm (2004)[16] 开发并求解了上述静态模型中的第七个模型，但是又给模型增加了额外的限制：他在其中将约束系数矩阵 A 定义为完全幺模的。这确保定义可行解空间的凸多胞形的每个顶点都是整数解，因此，他使用单纯形法快速找到最优解。 Johansson & Falkman (2009)[28] 通过针对 S1 的详尽搜索算法解决了较小的问题。在比较每个可行解决方案的目标函数值时，他们表明具有 9 个武器和 8 个目标的问题需要 13 分钟才能运行完成，而添加一个额外的目标需要 43.7 分钟才能运行完成，他们提出这些是为了说明组合爆炸：可以看出，此时问题能够精确处理的规模非常小，仅仅能够达到10个武器与10个目标的规模。在文献中可以找到几个使用分支定界算法的案例，以展示对于该问题能够求解的规模非常小：Rosenberger et al. (2005)[27] 解决了最多 8 个武器和 4 个目标的第六个模型。Ahuja et al. (2007)[17] 实施了三种下界策略来提高探测节点的效率：广义网络流解决方案、MMR 解决方案和最小成本流解决方案。 Kline (2017)[20] 开发了一种分支定界算法来求解第一个模型，并能够为多达 10 种武器和 10 个目标找到最优解，而当问题的规模进一步增加（20个武器与20个目标）时，他们甚至需要7天的计算才能找到一个最优解。

### 基于外逼近的精确算法及其计算规模

Anderson(2022)[29] 年的文章中则提供了一种思路。该文章首先借鉴了之前文献中对于问题线性化的常见方法，并进一步开发了一种专门的精确算法来使用紧的分段线性函数对于目标函数进行下近似，以处理问题的目标函数。该算法的新颖之处在于，它们首先使用紧的分段线性下近似以找到问题的下界，同时还借助这个方法来指导分支定界框架中的分支步骤，同时利用精确求解子问题得以保证在分支定界框架中能够求得最终的精确解。在该文章中，作者指出算法可以建立在通过对目标进行简单的手动调整的任何分支定界算法求解器中，因此，作者称呼自己的算法名称为分支-调整-定界，或简化地称为分支调整方法。

该问题进一步拓展了问题的求解规模。该文章中所提出的解决方法利用混合整数求解器来实现线性优化，并处理非常大规模的 WTA 问题实例。当问题的规模较大时，如果针对某一个特定的场景没有在规定时间内求解得到精确解，则该算法还可以提供一个与精确解非常接近的近似解。该算法在进行测试时在几分钟内解决了多达 400 种武器类型和 800 个目标的实例。对于更大规模的问题可以在两小时内一个比较好的近似解。该方法的另一个好处在于其通用性，可以与更复杂的WTA模型进行结合以达到优化其他方法的目的。

### 基于线性规划建模的列枚举方法及其计算规模

Lu(2021)[30]针对最原始的 WTA 问题提出了一种新的精确算法。在之前的问题中，将问题线性化的方式往往是对问题进行线性近似，但在该文章中采用了对WTA问题的精确解进行线性建模；更具体地说，针对在第三章提出的第一个静态模型，该文章给出了模型的一个完全等价的线性模型，通过将原有解所有解以特殊的形式枚举出来作为新的变量以保证问题的线性性。但是因为列举了所有的解，这中建模方式得到的数学模型的规模（变量数）是巨大的（能够达到n×2m的规模 ）。为了减少过多的列带来的困难，文章应用了一种被其称之为列枚举的方法，并将这种方法加入分支定界框架。通过列枚举方法和枚举过程中应用的新机制——文章中称之为武器控制（即保证某个武器比另一个武器要更好）——该文章给出了一种独特的枚举思路，很大程度地缩减了模型中需要枚举的列数。

文章中新的精确算法可以在很短的执行时间内解决多达 400 个武器和 400 个目标的大型 WTA 问题实例。具体来说，文章中用于解决 Ahuja(2017)[17] 等人实例的精确算法的平均执行时间为4.68 s，最难的例子时间不到108 s，80件武器80个目标的例子时间为0.40 s。通过与之前的精确算法尝试过的最大问题规模（80 件武器和 80 个目标，16.2 小时）和之前的启发式算法尝试过的最大问题规模（200 件武器和 400 个目标）相比，该文章中的方法在计算规模上非常有效。

## 启发式算法

由于 WTA 的计算复杂性，大多数WTA相关的文献都集中在提供一个启发式的解决方案，而不是保证精确解的求解思路。 在之前的文献中，大部分文章使用比较知名的启发式算法，例如超大规模邻域 (VLSN) 搜索或遗传算法 (GA)，但仍然有一部分启发式算法希望利用WTA问题的特殊结构来对问题进行求解。

由于本次调研报告的主要主题是与精确算法相关的内容，因此对于启发式算法的部分将不进行过于详细的展开。

# 研究思路

## 算法：线性化与列生成方法

### 算法思路

在数学背景一节中，已经指出了整数规划问题的求解难度，而针对WTA问题的具体模型，求解的难点在于其目标函数的形式是非线性的，从而缺乏比较成熟的求解手段。由于这个特点，模型的精确解无法通过已有的求解器直接求解得到，因此需要我们针对问题的具体结构设计适合该问题的算法思路，通过将非线性问题转化为多个较容易求解的线性规划问题。如4.1节指出的情况，目前精确算法中计算结果比较好的思路有两种，一种是通过将场景进行枚举的后将问题转化为一个等价的线性形式，二是通过外逼近算法求解问题，以下将详细介绍这两种求解算法的思路。

对于第一种算法，将场景进行枚举的后将问题转化为一个等价的线性形式虽然能够避免目标函数的非线性性，但是会导致改写后的模型变量非常多，假设武器个数为m，目标个数为n，则其规模为个，这会导致直接使用常用的线性规划算法如单纯形法求解问题比较困难，因此针对该结构有不同的方案。在已有文献中，通过分析该问题的结构，准备直接对全部的列进行枚举，但在过程中多加了一些判断条件以降低问题的规模。我们希望对这个子问题采用列生成的方法。简单来说，列生成方法是一个求解具有很多列的线性规划问题的通用方法，其主要思路是每次选入最可能对问题起到改进效果的变量（比如在该问题中，是针对某个目标采取某个打击形式），不断重复此过程，直到最后找到最优解。关于列生成的主要内容将包含在5.1.2节中。

对于第二种算法，主要是在分支定界算法的框架下，通过对于目标函数进行分段线性凸函数的下逼近，依此精确求解WTA问题。该方法目前在大规模问题上求解得到一个近似解的能力比较强，且可以将该方法应用在求解列生成方法的子问题上，后续在研究中也将进一步关注该方法。

我们目前讨论的方法主要是第一种算法，目前已经与主承研项目进行了对接，并尝试对上述算法中使用的模型进行调整，使其能够与该项目的更紧密地结合。

### 列生成方法的基本思路

列生成方法的总体思想是许多线性规划问题的列数（变量）太多而无法明确考虑所有变量，因此在算法的开始仅使用其变量的子集求解所考虑的子问题开始求解。 然后迭代地，将有可能改进目标函数的变量添加到数学规划模型中。一旦可以证明添加新变量将无法再提高目标函数的值，该过程就会停止。应用列生成算法时，希望只生成很小一部分变量即可得到最优解，对于这个想法是基于以下思路的支持：在最优解中，大多数变量将是非基本变量并假定值为零，因此可以在没有它们的情况下找到最优解。

在算法的执行过程中，该算法考虑了两个问题：主问题和子问题。主要问题即如上面指出的，仅考虑部分变量，依次构造出一列规模逐渐变大的线性规划问题，知道能够保证得到问题的精确解。子问题则是为识别改进变量（即选择出可以改进主问题的变量）而创建的新问题。该算法的基本执行思路为：

* 初始化主问题和子问题
* 解决主问题
* 通过求解子问题得到能够改进原问题的改进变量
* 如果找到改进变量

将其添加到主问题中，然后转到第 2 步

* 否则

主问题的解是最优的，算法执行结束，输出精确解

### 列生成的子问题

列生成方法的过程中最困难的部分是如何找到一个可以改善主问题目标函数的变量。依据线性规划的理论，这可以通过找到具有最大reduced cost的变量来完成（假设问题是最小化问题而不失一般性）。如果没有变量具有负的reduced cost，则当前主问题的最优解即是全局最优的。

当变量个数很大时，通过计算所有降低成本，选择一个降低成本为负的变量，其计算量往往是过大的。因此，想法是只计算具有最小降低成本的变量，而这个过程被称为定价子问题，该问题在很大程度上取决于原始问题的结构。子问题的目标函数是搜索变量相对于当前对偶变量的reduced cost，约束条件要求变量服从一些自然的约束条件。当这种结构使得可以使用高效算法（通常是专用组合算法）解决子问题时，列生成方法特别有效。通常原问题是大规模的线性规划问题，此时可以保证子问题同样是线性规划问题。在此问题中，我们已经通过理论推导，证明该问题的子问题是一个凸优化问题，因此可以采用相应的凸优化求解器来对问题进行求解。

### 目前能够得到的求解规模

对于第一种算法，能够得到的求解规模为400个武器与400个目标在30秒内得到计算结果。但问题的难度会随着武器与目标的比率上升，比如200个武器攻击100个目标所需时间为50秒，因此在我们的情况中，如果如果希望处理武器与目标的比例较大（即多个武器同时攻击同一目标的情况）问题的复杂度会进一步上升。

第二种算法在之前的文献中限定了武器与目标的比例为1比2，即200个武器攻击400个目标这样的情况，它与我们的问题形式有所区别。它能够在一个小时的时间内，精确求解400个武器攻击800个目标的情况，同时针对500个武器与1000个目标的规模，也能够在两个小时的时间内得到差距为1%以内的解。

# 未来计划与总结

## 近期关于WTA问题的新模型

此前讨论的研究重点主要集中在标准的静态与动态WTA问题上，最近的研究提供了一些不同的框架来对WTA问题进行建模，在该节中，将对近年针对WTA问题建立的新的数学模型框架进行讨论。

## 加入传感器的武器目标分配问题

导弹防御依赖于传感器的准确性和可靠性来识别每枚来袭导弹的类型和位置，从而才能够比较好地对目标进行拦截。截至目前许多文献都忽视了传感器在真实战场中的重要性，并假设防御者是无所不知的。 然而，在文献中可以找到关于考虑有限数量传感器的不同方法。

Bogdanowicz et al. (2007)[31] 开发了一个模型，旨在将每个传感器分配给每个目标得到的好处与将每个武器分配给每个目标得到的好处相加，并最大化二者的综合。 Zi-fen et al. (2011)[32] 结合了 Bogdanowicz et al. (2007)[31] 开发的基于拍卖算法的技术，并减少网络拓扑结构会给问题引入的限制。

其他人已经考虑了传感器对探测来袭导弹的可能性的影响。 Jian & Chen (2015)[33] 将拦截器的损坏概率建模为传感器识别导弹的概率以及与传感器配对的武器的破坏能力。Xin et al. (2018)[34] 通过将成功交战的概率建模为拦截器的杀伤概率和传感器的检测概率的乘积来扩展相关的建模。

## 多目标规划

在第三章当中，我们考虑的全部目标函数都是以某种方式来最大化对目标的毁伤，但是最新的文献中也指出，如果仅考虑这一个目标可能并不完全与战场中的实际应用场景相匹配，即有的时候合理的弹药消耗或者控制最长的打击时间同样重要，在实战情况下，一个合适的武器目标分配还应尽量减少弹药和总操作时间消耗。Li et al. (2015)[35] 对 DWTA 进行建模，目标是同时最大化预期损坏并最小化弹药消耗。他们比较了这个双目标程序的两种解决方案技术的性能，之后将二者结合开发了第三种技术。 Li et al. (2017)[36] 又使用蚁群算法对问题进行了进一步的改进。在进行多目标规划的时候，有两种不同的思路，一种是将多个目标结合在一起，以此将问题整合为一个优化问题。另外一种思路则是求解帕累托最优解，即保证不会多个目标中任何一个目标比当前解差，且至少有一个目标比当前解好的方法。求解帕累托最优解的好处在于，该方法可以给出多个不同的解，每个解可能更关注于多个目标中的一部分，因此有利于人类决策者对根据对于战场态势的理解从多个解中选择最适合当前场景的解。

## 总结

在本次调研报告中，首先介绍了WTA问题以及整数规划的基本背景，并指出了采用精确算法求解WTA问题的意义。之后详细介绍了多种静态WTA模型，并简单介绍了动态WTA模型，并分析了这些模型的优劣。下一部分中给出了针对静态WTA问题的一些精确求解算法，指出近年来的一些发展对于求解静态WTA问题的精确求解有了一些突破，保证了整数规划框架能够求解规模相对较大的问题的能力。之后则指出了针对目前的文献结果，我们预计建立数学模型与设计算法的方向。在最后一部分中则指出了近年WTA问题在建模方面的最新进展，这些发展方向也能够作为此项目方向的参考。

# 参考文献

1. Manne, A. S. (1958). A target-assignment problem. *Operations research*, *6*(3), 346-351.
2. Lloyd, S.P., Witsenhausen, H.S.,(1986). Weapons allocation is np-complete. *Summer Computer Simulation Conference*, *1986*  pp. 1054-1058.
3. Day, R. H. (1966). Allocating weapons to target complexes by means of nonlinear programming. *Operations Research*, *14*(6), 992-1013.
4. denBroeder Jr, G. G., Ellison, R. E., & Emerling, L. (1959). On optimum target assignments. *Operations Research*, *7*(3), 322-326.
5. Lemus, F., & David, K. H. (1963). An optimum allocation of different weapons to a target complex. *Operations Research*, *11*(5), 787-794.
6. Eckler, A. R., & Burr, S. A. (1972). Mathematical models of target coverage and missile allocation. MILITARY OPERATIONS RESEARCH SOCIETY ALEXANDRIA VA.
7. Burr, S. A., Falk, J. E., & Karr, A. F. (1985). Integer prim-read solutions to a class of target defense problems. *Operations Research*, *33*(4), 726-745.
8. Chang, S. C., James, R. M., & Shaw, J. J. (1987, December). Assignment algorithm for kinetic energy weapons in boost phase defence. In *26th IEEE conference on decision and control* (Vol. 26, pp. 1678-1683). IEEE.
9. Soland, R. M. (1987). Optimal terminal defense tactics when several sequential engagements are possible. *Operations Research*, *35*(4), 537-542.
10. Hosein, P. A. (1989). *A class of dynamic nonlinear resource allocation problems*. Massachusetts Inst Of Tech Cambridge Lab For Information And Decision Systems.
11. Kwon, O., Kang, D., Lee, K., & Park, S. (1999). Lagrangian relaxation approach to the targeting problem. *Naval Research Logistics (NRL)*, *46*(6), 640-653.
12. Metler, W. A., Preston, F. L., & Hofmann, J. (1990). *A suite of weapon assignment algorithms for a SDI mid-course battle manager*. Naval Research Lab Washington DC.
13. Wacholder, E. (1989). A neural network-based optimization algorithm for the static weapon-target assignment problem. *ORSA Journal on computing*, *1*(4), 232-246.
14. Shang, G., Zaiyue, Z., Xiaoru, Z., & Cungen, C. (2007, December). Immune genetic algorithm for weapon-target assignment problem. In *Workshop on Intelligent Information Technology Application (IITA 2007)* (pp. 145-148). IEEE.
15. Karasakal, O. (2008). Air defense missile-target allocation models for a naval task group. *Computers & Operations Research*, *35*(6), 1759-1770.
16. Malcolm, W. P. (2004). *On the character and complexity of certain defensive resource allocation problems*. DEFENCE SCIENCE AND TECHNOLOGY ORGANISATION SALISBURY (AUSTRALIA) SYSTEMS SCIENCES LAB.
17. Ahuja, R. K., Kumar, A., Jha, K. C., & Orlin, J. B. (2007). Exact and heuristic algorithms for the weapon-target assignment problem. *Operations research*, *55*(6), 1136-1146.
18. Ahner, D. K., & Parson, C. R. (2015). Optimal multi-stage allocation of weapons to targets using adaptive dynamic programming. *Optimization Letters*, *9*(8), 1689-1701.
19. Bertsekas, D. P., Homer, M. L., Logan, D. A., Patek, S. D., & Sandell, N. R. (2000). Missile defense and interceptor allocation by neuro-dynamic programming. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, *30*(1), 42-51.
20. Kline, A. G., Ahner, D. K., & Lunday, B. J. (2019). Real-time heuristic algorithms for the static weapon target assignment problem. *Journal of Heuristics*, *25*(3), 377-397.
21. Wu, L., Wang, H. Y., Lu, F. X., & Jia, P. (2008, June). An anytime algorithm based on modified GA for dynamic weapon-target allocation problem. In *2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE World Congress on Computational Intelligence)* (pp. 2020-2025). IEEE.
22. Lee, Z. J., Lee, C. Y., & Su, S. F. (2002). An immunity-based ant colony optimization algorithm for solving weapon–target assignment problem. *Applied Soft Computing*, *2*(1), 39-47.
23. Su, M., Qian, H., & Wang, X. F. (2004). Immune memory-based ant colony algorithm for weapon-target assignment solution. *Comput Eng*, *34*(4), 215-217.
24. Xin, B., Chen, J., Zhang, J., Dou, L., & Peng, Z. (2010). Efficient decision makings for dynamic weapon-target assignment by virtual permutation and tabu search heuristics. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, *40*(6), 649-662.
25. Khosla, D. (2001, August). Hybrid genetic approach for the dynamic weapon-target allocation problem. In *Battlespace digitization and network-centric warfare* (Vol. 4396, pp. 244-259). SPIE.
26. Leboucher, C., Shin, H. S., Siarry, P., Chelouah, R., Le Ménec, S., & Tsourdos, A. (2013). A two-step optimisation method for dynamic weapon target assignment problem. *Recent Advances on Meta-Heuristics and Their Application to Real Scenarios*, 109-129.
27. Rosenberger, J. M., Hwang, H. S., Pallerla, R. P., Yucel, A., Wilson, R. L., & Brungardt, E. G. (2005). *The generalized weapon target assignment problem*. Texas Univ at Arlington.
28. Johansson, F., & Falkman, G. (2009). An empirical investigation of the static weapon-target allocation problem. In *Proceedings of the 3rd Skövde Workshop on Information Fusion Topics* (pp. 63-67).
29. Andersen, A. C., Pavlikov, K., & Toffolo, T. A. (2022). Weapon-target assignment problem: Exact and approximate solution algorithms. *Annals of Operations Research*, 1-26.
30. Lu, Y., & Chen, D. Z. (2021). A new exact algorithm for the weapon-target assignment problem. *Omega*, *98*, 102138.
31. Bogdanowicz, Z. R., & Coleman, N. P. (2007, March). Sensor-target and weapon-target pairings based on auction algorithm. In *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on APPLIED MATHEMATICS* (pp. 92-96). World Scientific and Engineering Academy and Soc.(WSEAS) Stevens Point, WI.
32. Zi-fen, L., Xiang-min, L., Jin-jin, D., Jin-zhu, C., & Feng-xia, Z. (2011, August). Sensor-weapon-target assignment based on improved SWT-opt algorithm. In *2011 IEEE 2nd International Conference on Computing, Control and Industrial Engineering* (Vol. 2, pp. 25-28). IEEE.
33. Jian, W., & Chen, C. (2015, July). Sensor-weapon joint management based on improved genetic algorithm. In *2015 34th Chinese Control Conference (CCC)* (pp. 2738-2742). IEEE.
34. Li, J., Chen, J., Xin, B., & Chen, L. (2017, June). Efficient multi-objective evolutionary algorithms for solving the multi-stage weapon target assignment problem: A comparison study. In *2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)* (pp. 435-442). IEEE.
35. Li, J., Chen, J., Xin, B., & Dou, L. (2015, May). Solving multi-objective multi-stage weapon target assignment problem via adaptive NSGA-II and adaptive MOEA/D: A comparison study. In *2015 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)* (pp. 3132-3139). IEEE.
36. Li, Y., Kou, Y., & Li, Z. (2018). An improved nondominated sorting genetic algorithm III method for solving multiobjective weapon-target assignment Part I: the value of fighter combat. *International journal of aerospace engineering*, *2018*.